8Ш

УДК 519.651.5

В.И. Шмойлов
Южный научный центр РАН, г. Таганрог, Россия
mvs@tsure.ru

О некоторых применениях парадоксального способа суммирования непрерывных дробей

Рассматривается иное, нежели традиционное, определение сходимости непрерывных дробей. Новый метод суммирования используется при определении значений расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей и рядов, которые нередко возникают при математическом моделировании тех или иных практически важных задач.

Академик Н.Н. Моисеев в своей книге «Математика ставит эксперимент» [1] писал: «Нередко наше отставание в вычислительной технике нам удаётся компенсировать более эффективными алгоритмами, применяемыми при решении задач». Вниманию читателей предлагается парадоксальный способ определения значений расходящихся непрерывных дробей, который может быть эффективно использован разработчиками прикладного программного обеспечения современных отечественных вычислительных систем.

Одним из факторов широкого использования непрерывных дробей в вычислительной математике является то, что непрерывные дроби в большинстве случаев дают гораздо более общие представления трансцендентных функций, чем классические представления степенными рядами. Непрерывные дроби, зачастую, могут быть с большим эффектом использованы для ускорения сходимости медленно сходящихся рядов. Более того, преобразуя расходящиеся ряды в соответствующие непрерывные дроби, нередко можно просуммировать, то есть найти значения расходящихся рядов. Известно, что непрерывные дроби тесно связаны с аппроксимациями Паде, которые, как отмечается в [2], стали главным вычислительным средством в задачах статической механики и физики твердого тела. Поэтому существенные результаты, полученные в теории непрерывных дробей, в частности, в вопросах сходимости, могут быть использованы и в аппроксимациях Паде.

Бесконечной цепной дробью, или непрерывной дробью, называют выражение вида

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n+\ddots}}},$$

где a_i и b_i , $i=1,2,\ldots$ – в общем случае независимые переменные.

Часто непрерывную дробь записывают в компактном виде в форме Гершеля:

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}\,{}_+\,\frac{a_2}{b_2}\,{}_+\ldots{}_+\,\frac{a_n}{b_n}\,{}_+\ldots .$$

Непрерывная дробь называется сходящейся, если последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел. Этот предел называется значением непрерывной дроби. Непрерывная дробь называется расходящейся, если последова-

тельность ее подходящих дробей предела не имеет. Имеется большое количество признаков сходимости, при помощи которых можно сказать, существует предел последовательности подходящих дробей или нет. Наиболее широкое применение, пожалуй, получил достаточный признак Ворпицкого [2]. По признаку Ворпицкого непрерывная дробь

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \ldots + \frac{a_n}{1+}\ldots$$

сходится, если $|a_n| \le 1/4,\ n = 2,3\ldots$.

В статье будет рассмотрено несколько задач из разных разделов вычислительной математики, решенных при помощи так называемого r/φ-алгоритма, – нового метода суммирования расходящихся непрерывных дробей.

В [3] предложено иное, нежели традиционное, толкование сходимости непрерывных дробей. Для установления значений непрерывных дробей будем использовать r/φ-алгоритм:

Непрерывная дробь сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$*, если существуют пределы*

$$\lim_{s\to\infty} \sqrt[s]{\prod_{i=1}^{s} |P_i / Q_i|} = r_0, \tag{1}$$

$$\pi \lim_{s\to\infty} \frac{k_s}{s} = |\varphi_0|, \tag{2}$$

где P_i / Q_i *– значения i-й подходящей дроби из совокупности, включающей s подходящих дробей,* k_s *– число отрицательных подходящих дробей из s подходящих дробей.*

Этот алгоритм применим как к обыкновенным непрерывным дробям, так и к непрерывным дробям с графами иных типов, например, к непрерывным дробям Хессенберга и ветвящимся непрерывным дробям.

В случае непрерывных дробей, сходящихся в классическом смысле, аргумент φ_0 примет значения 0 или π. Если $\varphi_0 = 0$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет совпадать со значением модуля r_0:

$$z = r_0 e^{i0} = r_0.$$

Если $\varphi_0 = \pi$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет отрицательное число:

$$z = r_0 e^{i\pi} = -r_0.$$

Предложенный r/φ-алгоритм даёт возможность устанавливать значения расходящихся непрерывных дробей. Проиллюстрируем эффективность предложенного способа суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей решением ряда задач вычислительной математики.

Известно, что непрерывные дроби целесообразнее использовать для аппроксимации функций, нежели степенные ряды, так как непрерывные дроби зачастую сходятся в более широкой области. Например, ряд Меркатора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

представляет логарифмическую функцию в единичном круге, в то время как непрерывная дробь Лагранжа

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{2} + \frac{2x}{5} + \ldots + \frac{nx}{2} + \frac{nx}{2n+1+\ldots}$$

сходится к функции $\ln(1+x)$ на всей плоскости комплексного переменного, за исключением выреза от -1 до $-\infty$ [2].

При отрицательных значениях аргумента логарифмическая функция имеет комплексное значение, и естественно, что непрерывные дроби, получающиеся из непрерывной дроби Лагранжа при $x < -1$ будут расходящимися в классическом смысле.

На рис. 1 (а, б, в, г, д, е) показано распределение подходящих непрерывной дроби Лагранжа (2.1) при x = –10, –100, –1000 на начальных участках $(n = 1 \div 100$ и $n = 1 \div 500)$.

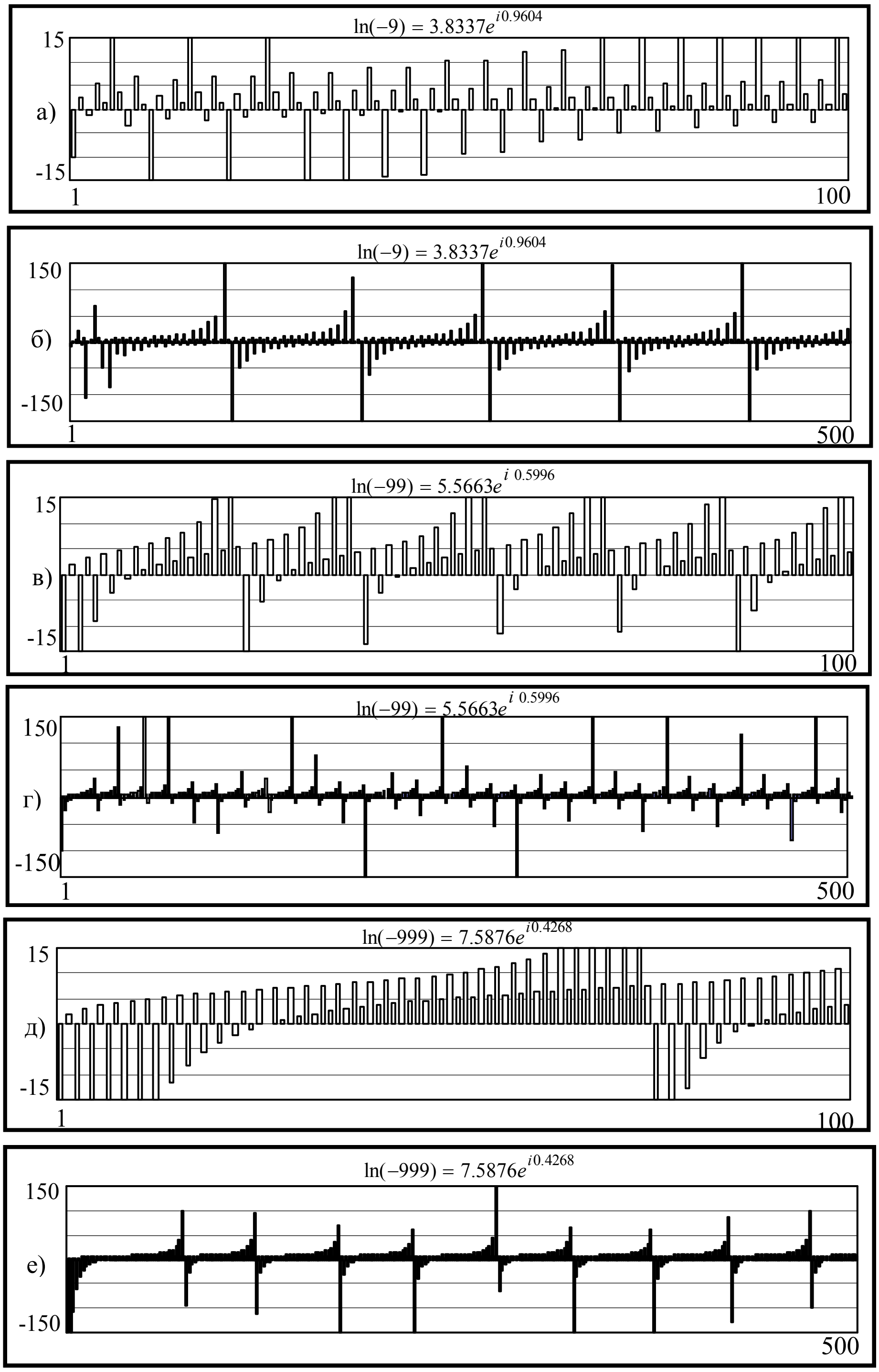


Рисунок 1 – Распределение значений подходящих непрерывной дроби логарифмической функции

В табл. 1 показаны результаты суммирования расходящейся непрерывной дроби

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1} - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{6}{2} - \frac{6}{5} - \ldots - \frac{3n}{2} - \frac{3n}{2n+1} - \ldots \,. \tag{3}$$

При отрицательном аргументе логарифмическая функция имеет комплексное значение

$$\ln(-2) = 3{,}2171505117 e^{i1{,}3536398454},$$

которое, естественно, не может приближаться непрерывной дробью с вещественными элементами и, тем не менее, суммирование при помощи r/φ-алгоритма позволяет установить значение дроби (3).

Таблица 1

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = \lvert r_0 - r_n \rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \lvert \varphi_0 - \varphi_n \rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
1	–3.0000000	3.0000000000	0.2171505117		3.1415926535	1.7879528081	m
2	6.0000000	4.2426406871	1.0254901754		1.5707963267	0.2171564813	m
4	–3.0000000	3.0000000000	0.2171505117		1.5707963267	0.2171564813	
8	–97.5000000	4.9614481602	1.7442976485		1.5707963267	0.2171564813	
16	1.4880473	3.5474336503	0.3302831386		1.3744467859	0.0208069405	m
32	3.1985122	3.6050160485	0.3878655367		1.3744467859	0.0208069405	
64	62.8693924	3.3885474566	0.1713969449	m	1.3744467859	0.0208069405	
128	0.9165216	3.1810462758	0.0361042359	m	1.3499030933	0.0037367521	m
256	1.7095765	3.2148854739	0.0022650377	m	1.3621749396	0.0085350941	
512	3.9037050	3.2112688498	0.0058816618		1.3499030933	0.0037367521	
1024	–15.4772571	3.2219262392	0.0047757275		1.3560390164	0.0023991710	m
2048	2.6358581	3.2194825453	0.0023320336		1.3529710549	0.0006687905	m
4096	11.1007665	3.2127253440	0.0044251676		1.3529710549	0.0006687905	
8192	–0.6961262	3.2169015620	0.0002489496	m	1.3533545501	0.0002852953	m
16384	–1.7591587	3.2167104407	0.0004400709		1.3533545501	0.0002852953	
32768	–6.4347291	3.2170964982	0.0000540134		1.3536421715	0.0000023260	m
65536	5.5879135	3.2171496506	0.0000008610		1.3536421715	0.0000023260	
131072	–3.9038315	3.2171884212	0.0000379094		1.3536182030	0.0000216423	
262144	16.0431708	3.2171480639	0.0000024477		1.3535942346	0.0000456108	
524288	–0.0551483	3.2171287791	0.0000217325		1.3536421715	0.0000023260	
1048576	–0.2709104	3.2171427009	0.0000078107		1.3536361793	0.0000036660	
2097152	–0.7308612	3.2171496552	0.0000008564	m	1.3536361793	0.0000036660	
4194304	–1.8537413	3.2171502478	0.0000002638	m	1.3536391754	0.0000006699	m
8388608	–7.2124648	3.2171495794	0.0000009323		1.3536399244	0.0000000790	m

Определение значения расходящейся непрерывной дроби

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1} - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{6}{2} - \frac{6}{5} - \ldots - \frac{3n}{2} - \frac{3n}{2n+1} - \ldots \,.$$

$$r_0 = 3.2171505117\ldots \qquad \varphi_0 = 1.3536398454\ldots$$

В первой колонке таблицы даны номера n подходящих дробей разложения (3). Номера подходящих дробей составляют степень 2: $n = 2^i$, $i = 1 \div 23$. Значения подходящих дробей с этими номерами приведены в соседней колонке 2. Как и следовало ожидать, значения подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$ с ростом n не стремятся к какому-либо пределу. Для чисел же, расположенных в колонке 3, напротив, стремление к пределу можно без труда обнаружить – значения асимптотически приближаются к величине 3.2171505117..., то есть к модулю комплексного числа $\ln(-2)$. Даже беглого взгляда на колонки 6 и 7 достаточно, чтобы убедиться, что с ростом количества подходящих дробей разложения (3) все более точно устанавливается значение аргумента искомого комплексного числа.

Найдены представления элементарных и некоторых специальных функций в виде непрерывных дробей Хессенберга [4]. Например,

$$\frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & x/5! & \dots \\ -1 & x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & \dots \\ 0 & -1 & x/1! & x/2! & x/3! & \dots \\ 0 & 0 & -1 & x/1! & x/2! & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x/1! & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & \dots \\ -1 & x/1! & x/2! & x/3! & \dots \\ 0 & -1 & x/1! & x/2! & \dots \\ 0 & 0 & -1 & x/1! & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

Непрерывная дробь (4) определяет логарифмическую функцию на всей плоскости комплексного переменного с разрезом от 0 до –1. Комплексное значение логарифмической функции на разрезе определяется из (4) суммированием по формулам (1) и (2). В качестве подходящих дробей (4) будем брать последовательность отношений определителей:

$$P_0=\frac{x/1!}{1},\qquad P_1=\frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! \\ -1 & x/1! \end{vmatrix}}{x/1!},\qquad P_2=\frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! \\ -1 & x/1! & x/2! \\ 0 & -1 & x/1! \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! \\ -1 & x/1! \end{vmatrix}},\qquad \dots$$

В табл. 2 приведены результаты вычисления комплексного числа $1/\ln(-2)$ при помощи функциональной непрерывной дроби Хессенберга (4) и алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей, то есть формул (1) и (2).

Определение значения непрерывной дроби (2.3) *при* $x=-1/3$.

$x=-1/3$, $r_0=0.3108340739\dots$, $\varphi_0=-1.3536398454\dots$.

Таблица 2

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r=\lvert r_0-r_n\rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi=\lvert\varphi_0-\varphi_n\rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
20	0.85127256	0.99198117	0.68114710	m	–1.41371669	0.06007684	m
21	0.02044264	0.82455439	0.51372032	m	–1.34639685	0.00724299	m
42	–0.02832422	0.50977666	0.19894259	m	–1.42119667	0.06755683	
84	–0.14445825	0.40513373	0.09429965	m	–1.38379676	0.03015691	
168	–0.75441728	0.35654051	0.04570644	m	–1.36509680	0.01145696	
336	0.32678464	0.33285231	0.02201823	m	–1.35574682	0.00210698	m
672	2.01078357	0.32176153	0.01092745	m	–1.35574682	0.00210698	
1344	–0.03019484	0.31569144	0.00485737	m	–1.35574682	0.00210698	
2688	–0.14954713	0.31342156	0.00258748	m	–1.35457808	0.00093823	m
5376	–0.81466750	0.31217034	0.00133626	m	–1.35399370	0.00035386	m
10752	0.30407891	0.31149855	0.00066447	m	–1.35370152	0.00006167	m
21504	1.28357034	0.31116989	0.00033582	m	-1.35370152	0.00006167	
43008	–0.09454281	0.31099243	0.00015836	m	–1.35370152	0.00006167	
86016	–0.38364272	0.31091665	0.00008257	m	–1.35366499	0.00002515	m
172032	0.81555456	0.31087600	0.00004193	m	–1.35364673	0.00000689	m
344064	–0.22761506	0.31085447	0.00002039	m	–1.35364673	0.00000689	
688128	–10.07498787	0.31084454	0.00001047	m	–1.35364217	0.00000232	m
1376256	0.08515530	0.31083902	0.00000495	m	–1.35363988	0.00000004	m
2752512	0.10347124	0.31083657	0.00000249	m	–1.35363988	0.00000004	
5505024	0.14104327	0.31083533	0.00000126	m	–1.35363988	0.00000004	
11010048	0.22449739	0.31083471	0.00000064	m	–1.35363988	0.00000004	

Приведём ещё пример нахождения значений расходящейся в классическом смысле непрерывной дроби при помощи описанного выше алгоритма суммирования.

Известна непрерывная дробь Лагранжа для степенной функции [2]:

$$(1+x)^{\nu} = 1 + \frac{\nu x}{1\,+}\;\frac{(1-\nu)x}{2\,+}\;\frac{(1+\nu)x}{3\,+\ldots+}\;\frac{(m-\nu)x}{2\,+}\;\frac{(m+\nu)x}{2m+1+\ldots}\,. \qquad (5)$$

Непрерывная дробь (5) сходится на всей плоскости комплексного переменного, разрезанной по вещественной оси от -1 до $-\infty$. При $x<-1$ подкоренное выражение функции $y=(1+x)^{\nu}$ становится отрицательным, следовательно, значение функции $(1+x)^{\nu}$ при $x<-1$ становится комплексной величиной, которая, очевидно, не может приближаться вещественной последовательностью подходящих дробей разложения (5), элементы которого при $x<-1$ остаются действительными величинами.

В табл. 3 приведены результаты вычисления значения расходящейся непрерывной дроби для $\sqrt[3]{-9}$ при помощи r/φ -алгоритма.

Определение значения расходящейся непрерывной дроби

$$\sqrt[3]{-9} = 1 - \frac{10}{3\,-}\;\frac{2\cdot 10}{2\,-}\;\frac{4\cdot 10}{9\,-}\;\frac{5\cdot 10}{2\,-\ldots-}\;\frac{(3n-1)\cdot 10}{2\,-}\;\frac{(3n+1)\cdot 10}{3(2n+1)\,-\ldots}\,.$$

$r_0 = 2.080083\ldots$, $\varphi_0 = 1.047197\ldots$.

Таблица 3

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = \lvert r_0 - r_n \rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \lvert \varphi_0 - \varphi_n \rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
2	2.4285714	8.095238095238	6.015154272186	m	0.000000000000	1.047197551196	m
4	7.9230769	1.892578548704	0.187505274347	m	0.000000000000	1.047197551196	
8	0.0083609	0.946908431432	1.133175391618		0.785398163397	0.261799387799	m
16	2.3793179	1.514212477498	0.565871345553		0.785398163397	0.261799387799	
32	3.4334933	1.931910874242	0.148172948809	m	0.687223392972	0.359974158223	
64	–6.6957404	2.285828469458	0.205744646406		0.932660319034	0.114537232162	m
128	1.8056646	2.171608471371	0.091524648319	m	0.957204011640	0.089993539555	m
256	2.7046939	2.095947975804	0.015864152753	m	1.043106935762	0.004090615434	m
512	14.0355053	2.077080542151	0.003003280900	m	1.043106935762	0.004090615434	
1024	0.4131559	2.063579787259	0.016504035792		1.046174897338	0.001022653858	m
2048	–0.5703198	2.085479528230	0.005395705178		1.044640916550	0.002556634646	
4096	–33.5321135	2.082858835017	0.002775011965	m	1.046174897338	0.001022653858	
8192	1.1197769	2.079900863342	0.000182959709	m	1.048092373322	0.000894822126	m
16384	1.0914866	2.080396700069	0.000312877017		1.047133635330	0.000063915866	m
32768	1.0349376	2.080307362394	0.000223539343		1.047229509129	0.000031957933	m
65536	0.9216825	2.079865087605	0.000218735446		1.047229509129	0.000031957933	
131072	0.6914169	2.080106476321	0.000022653270	m	1.047205540679	0.000007989483	m
262144	0.1869493	2.079930141859	0.000153681192		1.047193556454	0.000003994741	m
524288	–1.4500205	2.080071498760	0.000012324291	m	1.047199548567	0.000001997370	m
1048576	5.5741164	2.080081877069	0.000001945982	m	1.047190560398	0.000006990797	
2097152	–0.8763266	2.080075907132	0.000007915919		1.047195054483	0.000002496713	
4194304	15.7595707	2.080077041783	0.000006781268		1.047199548567	0.000001997370	
8388608	0.4758782	2.080083260804	0.000000562247	m	1.047197301525	0.000000249671	m

На рис. 2 показано распределение подходящих дробей расходящейся непрерывной дроби для $\sqrt[3]{-9}$.

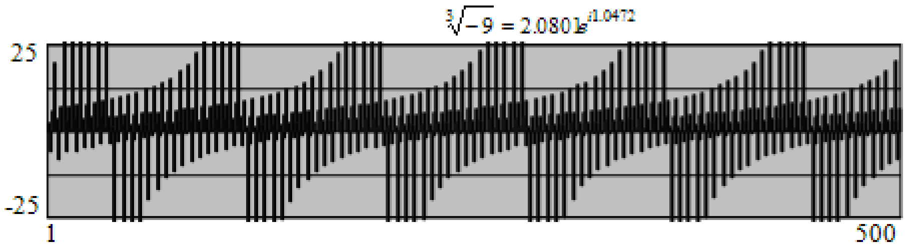


Рисунок 2 – Распределение значений подходящих непрерывной дроби для $\sqrt[3]{-9}$

Следует отметить, что при использовании r/φ-алгоритма необходимо иметь эффективные алгоритмы для построения так называемых соответствующих непрерывных дробей и для вычисления длинных серий значений подходящих дробей. Использование для счёта классического рекуррентного алгоритма (FR-алгоритм) приводит к быстрому переполнению разрядной сетки компьютера, а применение естественной процедуры вычисления непрерывной дроби «снизу-вверх» (BR-алгоритм) невозможно из-за недопустимо больших временных затрат при определении серий значений подходящих дробей. В [4] были детально рассмотрены алгоритмы для вычисления длинных серий значений подходящих дробей. В [5] изложены различные методы построения соответствующих непрерывных дробей.

Расходящиеся ряды нередко суммируются через соответствующие цепные дроби [6]. Для степенного ряда

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{6}$$

можно построить непрерывную дробь

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \ldots + \frac{\omega_{2n-1} x}{1} - \frac{\omega_{2n} x}{1} + \ldots, \tag{7}$$

такую, что разложение n-й подходящей дроби этой цепной дроби будет совпадать с исходным рядом (6) вплоть до члена $c_n x^n$ включительно:

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \gamma_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

Такую непрерывную дробь называют соответствующей ряду или соответствующей непрерывной дробью.

Используя коэффициенты c_i степенного ряда (6), можно построить соответствующую непрерывную дробь (7) по формулам Хейлерманна – Стилтьеса [7]:

$$\omega_0 = c_0, \quad \omega_1 = c_1,$$

$$\omega_{2n} = \frac{\varphi_{n-1} \cdot \psi_{n+1}}{\varphi_n \cdot \psi_n}, \qquad \omega_{2n+1} = -\frac{\varphi_{n+1} \cdot \psi_n}{\varphi_n \cdot \psi_{n+1}};$$

$$\varphi_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ . & . & . & . \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \qquad \psi_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ c_3 & c_4 & \cdots & c_{n+1} \\ . & . & . & . \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \psi_1 = 1.$$

Найдем значение расходящегося ряда Эйлера:

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \ldots = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2}{1} + \ldots + \frac{n}{1} + \frac{n}{1} + \ldots = 0{,}5963473623231945\ldots \tag{9}$$

Ряд Эйлера (9) связан с интегральной показательной функцией $Ei(x)$. Действительно, известен быстро сходящийся ряд:

$$-eEi(-1) = -e\left(C - 1 + \frac{1}{2 \cdot 2!} - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \ldots\right) = 0{,}5963473623231945\ldots,$$

где e – неперово число, равное 2.718281… ,

C – постоянная Эйлера, имеющая значение 0.577215…

Определив по расходящимся рядам соответствующие непрерывные дроби,

можем найти значения других расходящихся рядов. Например,

$$1+1-1+2-5+14-42+132-\ldots=1+\frac{1}{1}\frac{1}{1+}\ldots\frac{1}{1+}\ldots=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618033\cdots \qquad (10)$$

$$1-1+1\cdot3-1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot5\cdot7-1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9+\ldots=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\ldots\frac{n}{1+}\ldots=0,655679\cdots \qquad (11)$$

Расходящийся ряд (10) имеет своим значением «отношение золотого сечения», а расходящийся ряд (11) связан с неполной гамма-функцией

$$\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\ldots\frac{n}{1+}\ldots=\sqrt{\frac{e}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}erfc\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0,6556795424\ldots$$

Метод суммирования расходящихся непрерывных дробей может быть эффективно использован при решении такой практически важной проблемы, как решение бесконечных нерегулярных систем линейных алгебраических уравнений. Известно, что решение трёхдиагональной системы линейных алгебраических уравнений можно представить в виде непрерывных дробей, частными числителями и знаменателями которых были бы некоторые выражения из элементов исходной матрицы. Этот способ записи решений трёхдиагональной системы эквивалентен алгоритму «прогонки». Непрерывные дроби, представляющие решения системы, будут бесконечными, если бесконечна система линейных алгебраических уравнений. Но бесконечные непрерывные дроби могут быть сходящимися и расходящимися. Задачи математической физики зачастую описываются бесконечными системами линейных алгебраических уравнений. Нередко при такой аппроксимации получают так называемые нерегулярные системы алгебраических уравнений. Под нерегулярными понимают системы алгебраических уравнений, решения которых не стремятся к пределу в классическом смысле с ростом размерности системы.

При решении регулярных систем не возникает трудностей, так как вместо бесконечных систем оперируют «усечёнными» системами. Непосредственно метод «усечения», очевидно, не срабатывает в случае нерегулярных бесконечных систем. При некоторых ограничениях решения нерегулярных бесконечных систем находятся при помощи рассмотренного выше метода суммирования расходящихся непрерывных дробей. Можно указать ещё ряд «проблемных» задач в вычислительной математике, эффективное решение которых обеспечивается алгоритмом суммирования расходящихся непрерывных дробей.

Литература

1. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
2. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. с англ.– М.: Мир, 1985. – 414 с.
3. Шмойлов В.И. Периодические цепные дроби. – Львов: Академический Экспресс, 1998. – 219 с.
4. Качмар В.С., Русин Б.П., Шмойлов В.И. Алгоритмы вычисления значений цепных дробей // Вычислительная математика. – 1998. – Том 38, № 9. – С. 1436-1451.
5. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби: В 3-х т. – Т. 2: Расходящиеся непрерывные дроби. – Львов: Меркатор, 2004. – 558 с.
6. Brezinski C. History of continued fraction and Pade approximants. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 547 p.
7. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions with applications. – Amsterdam – London – New-York – Tokyo, 1992. – 606 p.

V.I. Shmoylov

On Some Applications of Paradoxal Method of Continued Fractions Summation

In this article we describe another, then traditional, definition of convergence of continued fractions. New method of summation is used for determinating values of divergent in classic sense continued fractions and series, which often appears during the mathematical modeling these or those practically important problems.

Статья поступила в редакцию 22.07.2008.